TÖL402G - Rökfræði í Hugbúnaðargerð - Sönnun á log2

Forrit

Látum `log2` vera forritið

```
x = 0;
while (N > 1) {
  x = x + 1;
  N = N / 2;
}
```

Þar sem `/` táknar heiltöludeilingu námundað niður á við.

Við viljum sýna að

$$\vdash_{par} \quad (\!|N \geq 1 \land N = N_0|\!) \quad \texttt{log2} \quad (\!|x = \lfloor \log_2(N_0) \rfloor|\!)$$

Fastayrðingin sem við reyndum í tíma $\eta \equiv 2^x \cdot N \leq N_0 < 2^{x+1} \cdot N$ virkar ekki. Hún gildir fyrir öll x, N gildi í keyrslunni en ein og sér virkar hún ekki. Tökum til dæmis $N_0 = 11$ þá uppfylla $x = 1$ og $N = 3$ fastayrðinguna, en $x = 2$ og $N = 1$ gera það ekki. Ef við keyrum forritið fyrir $N = 11$ þá lendum við aldrei í ástandi þar sem $x = 1$ og $N = 3$ gildir, en fastayrðingin er gölluð engu að síður.

Betri fastayrðing er $\eta \equiv \lfloor \log_2(N) \rfloor + x = \lfloor \log_2(N_0) \rfloor$. Veikasta fyrirskilyrði fyrir gildisveitingarnar tvær verður þá $\eta' \equiv \lfloor \log_2(\lfloor \frac{N}{2} \rfloor) \rfloor + x + 1 = \lfloor \log_2(N_0) \rfloor$ og við þurfum því að sýna að $\eta \land (N > 1) \to \eta'$.

Við skiptum í tvö tilfelli og gerum ráð fyrir að η gildi. Ef N er slétt tala þá er

$$\begin{aligned}
\lfloor \log_2(\lfloor \frac{N}{2} \rfloor) \rfloor + x + 1 &= \lfloor \log_2(\frac{N}{2}) \rfloor + x + 1 \\
&= \lfloor \log_2(N) - 1 \rfloor + x + 1 \\
&= \lfloor \log_2(N) \rfloor - 1 + x + 1 \\
&= \lfloor \log_2(N) \rfloor + x \\
&= \lfloor \log_2(N_0) \rfloor
\end{aligned}$$

Þar sem síðasta línan er vegna þess að η gildir.

Ef N er oddatala þá er $N = 2k + 1$ og $\lfloor \log_2(2k + 1) \rfloor = \lfloor \log_2(2k) \rfloor$ (einfalt að sanna með mótsögn). Þá fæst að ef η gildir þá höfum við

$$\begin{aligned}
\lfloor \log_2(N_0) \rfloor &= \lfloor \log_2(N) \rfloor + x \\
&= \lfloor \log_2(2k + 1) \rfloor + x \\
&= \lfloor \log_2(2k) \rfloor + x \\
&= \lfloor \log_2(k) + 1 \rfloor + x \\
&= \lfloor \log_2(k) \rfloor + x + 1
\end{aligned}$$