TÖL403G - Greining Reiknirita
Samantekt um splay tré

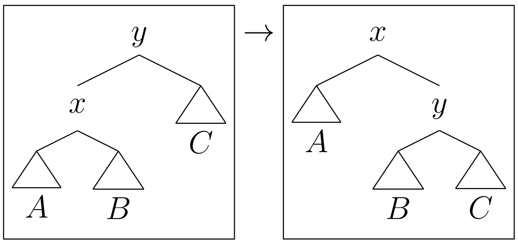
1 Skilgreining

Splay tré eru venjuleg tvíleitartré nema að `insert, search` og `delete` aðgerðirnar færa hnútana efst í tvíleitartréð. Hnútarnir eru færðir með sérstakri splay aðgerð.

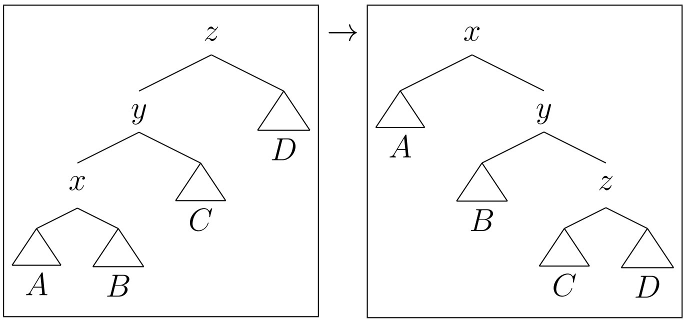
Splay aðgerðin er mismunandi eftir því hvar hnúturinn er. Ef við framkvæmum splay aðgerð á hnúti x í trénu eru 4 tilfelli

1. x er rótin, þá er ekkert gert

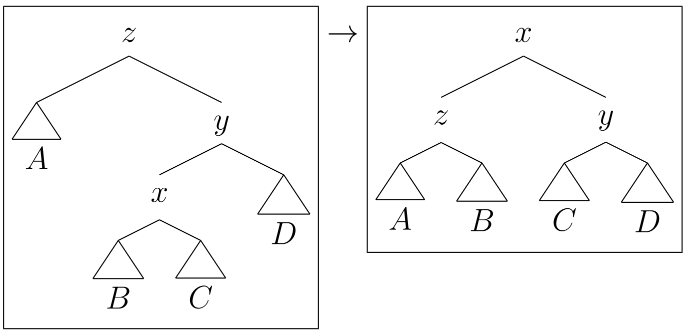
2. x er barn rótar, þá er x snúið upp í rótina, þ.e. hægri snúningur ef x er vinstra barn rótar og öfugt.



3. x er vinstra barn y og y er vinstra barn z. Þá er y hægri snúið fyrst og síðan x hægri snúið (eins fyrir hægra-hægra barn)



4. x er vinstra barn y og y er hægra barn z. Þá er x hægra snúið og x svo aftur vinstra snúið (eins fyrir hægra-vinstra barn)



2 Uppsöfnuð tímaflækja

Setning 2.1. *Fyrir splay tré eftir n innsetningar og m splay aðgerðir er heildartímaflækjan $O(m \log n)$.*

Tímaflækjan er fyrir m aðgerðir og kallast uppsöfnuð tímaflækja. Ólíkt því sem við höfum fyrir rauð-svört tré er ekkert gott mat á hverri `insert`, `search` og `delete` aðgerð heldur höfum við aðeins að þær taka í mesta lagi $O(\log n)$ að meðaltali ef við dreifum kostnaðinum á allar aðgerðir.

3 Greining tímaflækju

Við sönnum setningu 2.1 með því að sanna sterkari niðurstöðu

Fyrir hnút x skilgreinum við $\mathrm{tw}(x)$ sem fjölda hnúta í hluttrénu sem er með rót í x og $\mathrm{rank}(x) = \lfloor \log(\mathrm{tw}(x)) \rfloor$. Hugmyndin er að geyma peninga í trénu sem hjálpa okkur að halda utan um fjölda aðgerða sem hafa verið framkvæmdar.

Fastayrðing fjármála hver hnútur x í trénu hefur $\mathrm{rank}(x)$ peninga.

Í hvert skipti sem við framkvæmum aðgerð borgum við ákveðið mikið inn í kerfið, hluti fer í það að borga "laun" fyrir vinnuna og hluti fer í að sjá til þess að allir hnútar hafi nægan pening. Í hvert skipti sem við framkvæmum $O(1)$ aðgerðir borgum við 1 pening í laun.

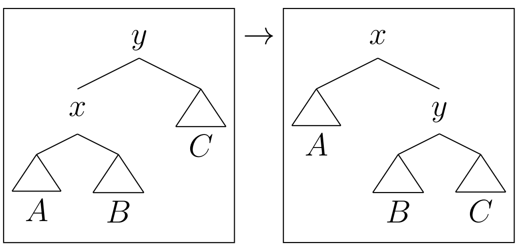
Lemma 3.1. *Splay aðgerð á x með rót v þarf í mesta lagi* $3\left(\mathrm{rank}(v) - \mathrm{rank}(x)\right) + 1$ *peninga til að viðhalda peningakerfi og borga fyrir aðgerðir.*

Sönnun. Við gerum ráð fyrir að á trénu sé nægur peningur og við sönnum að hvert lítið splay skref viðhaldi peningaskilyrðinu í hverjum hnúti og geti borgað nóg í laun. Við notum $+1$ partinn fyrir síðasta skrefið þegar x er rót eða x er barn rótar. Látum rank' og tw' vísa til trésins eftir breytingu. Tökum eftir að ef x er barn y þá er $tw(x) \leq tw(y)$ og því gildir $\mathrm{rank}(x) \leq \mathrm{rank}(y)$.

Við skiptum í 4 tilfelli eftir því hvaða splay aðgerð er framkvæmd.

1. x er rót, þá er $v = x$ og $3\left(\mathrm{rank}(v) - \mathrm{rank}(x)\right) + 1 = 1$, við breytum ekki trénu og borgum 1 pening í laun.

2. x er barn rótarinnar

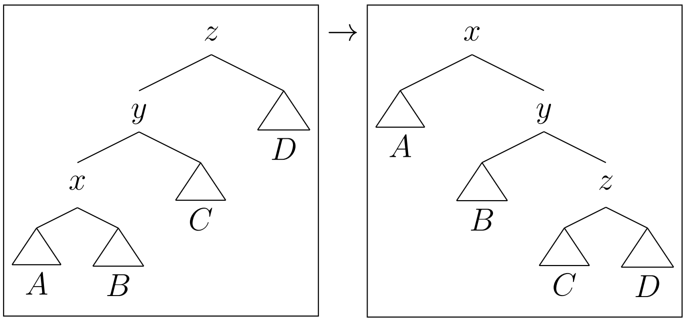
   

   Þá breytast hluttrén í A, B, C ekkert. Þá gildir $\mathrm{rank}'(x) = \mathrm{rank}(y)$ og við þurfum að bæta við

   $$\mathrm{rank}'(y) - \mathrm{rank}(x) \leq \mathrm{rank}'(x) - \mathrm{rank}(x) = \mathrm{rank}(v) - \mathrm{rank}(x)$$

   peningum á hnútana í trénu, en þetta er þriðjungur af því sem til er. Síðan notum við 1 auka pening til að borga laun.

3. x er vinstra-vinstra barn



Hér gildir að $\text{rank}'(x) = \text{rank}(z)$. Við þurfum að bæta við

$$\Delta = \text{rank}'(y) + \text{rank}'(z) - \text{rank}(x) - \text{rank}(y)$$

peningum í kerfið. Nú gildir $\text{rank}(y) \geq \text{rank}(x)$, $\text{rank}'(y) \leq \text{rank}'(x)$ og $\text{rank}'(z) \leq \text{rank}'(x)$. Því fæst að

$$\Delta \leq 2\,(\text{rank}'(x) - \text{rank}(x)) = 2\,(\text{rank}(z) - \text{rank}(x))$$

Tökum eftir að $\text{rank}'(x) \geq \text{rank}(x)$ því hluttréð undir x er stærra eftir á. Ef $\text{rank}'(x) > \text{rank}(x)$ þá dugar að nota $\text{rank}'(x) - rank(x) \geq 1$ sem við eigum í afgang til að borga laun. Ef hins vegar $\text{rank}'(x) = \text{rank}(x)$ þá tökum við peninga af trjánum. Tökum eftir að þá er $\Delta \leq 0$ og við sjáum að

$$\text{rank}(x) \leq \text{rank}(y)\text{rank}(z) = \text{rank}'(x) = \text{rank}(x)$$

og því hlýtur jafnaðarmerkið að gilda alls staðar. Tökum eftir að $\text{tw}(x) + \text{tw}'(z) \leq \text{tw}'(x)$ svo ef $\text{rank}'(z) = \text{rank}'(x)$ þá fengist að

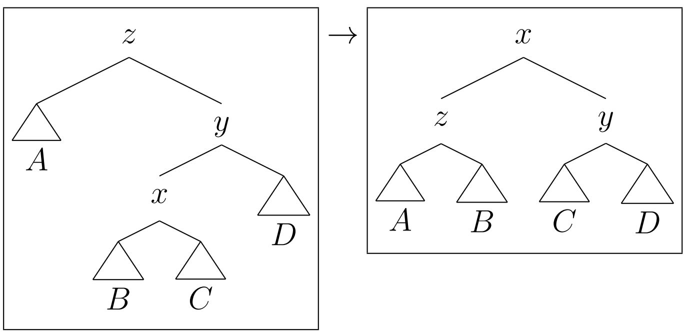
$$tw'(x) \geq \text{tw}(x) + \text{tw}'(z) \geq 2^{\text{rank}(x)} + 2^{\text{rank}'(z)} = 2 \cdot 2^{\text{rank}(x)} = 2^{\text{rank}(x)+1} = 2^{\text{rank}'(x)+1}$$

sem er mótsögn, skv. skilgreiningu á rank'. Því gildir að $\text{rank}'(z) < \text{rank}'(x)$ og breytingin í kerfinu er

$$\Delta = \text{rank}'(y) + \text{rank}'(z) - \text{rank}(y) - \text{rank}(x) \leq \text{rank}'(z) - \text{rank}'(x) < 0$$

Þar sem Δ er heiltala hlýtur að verða a.m.k. einn peningur afgangs sem við getum notað til að borga laun.

4. x er hægra-vinstra barn.



Sönnunin hér er nákvæmlega eins og í tilfelli 3 það eina sem þarf að gera er að finna aukapeninginn þegar $\text{rank}'(x) = \text{rank}(x)$. Eins og sést á mynd gildir

$$\text{rank}(x) \leq \text{rank}(y) \leq \text{rank}(z) = \text{rank}'(x) = \text{rank}(x)$$

og því hlýtur jafnaðarmerkið að gilda. Tökum eftir að $\mathrm{tw}'(x) \geq \mathrm{tw}'(z) + \mathrm{tw}'(y)$. Þá gildir $\min\{\mathrm{rank}'(z), \mathrm{rank}'(y)\} < \mathrm{rank}'(x)$, því annars fengist

$$\mathrm{tw}'(x) \geq \mathrm{tw}'(z) + \mathrm{tw}'(y) \geq 2^{\mathrm{rank}'(z)} + 2^{\mathrm{rank}'(y)} = 2^{\mathrm{rank}'(x)+1}$$

sem er mótsögn. Því hlýtur $\Delta < 0$ að gilda og hægt er að taka pening af trénu til að borga laun.

Þegar x er ekki einu eða tveimur skrefum frá rót er hægt að nota í mesta lagi $3\,(\mathrm{rank}'(x) - \mathrm{rank}(x))$ peninga í hverju skrefi. Samtals verða þetta $3\,(\mathrm{rank}(v) - rank(x))$ peningar og $+1$ er notaður í síðasta skrefinu. $\square$

Sönnun. Sönnun á setningu 2.1 Við tökum eftir því að $\mathrm{rank}(v) = O(\log n)$ svo að með hverri splay aðgerð borgum við í mesta lagi $O(\log n)$ peninga. Fjöldi peninga sem við borgum er meiri en fjöldi grunnaðgerða sem eru framkvæmdar. Því verður heildar tímaflækjan í mesta lagi $O(m \log n)$. $\square$